

L'article original est disponible sur <http://dx.doi.org/10.1051/mattech/2015059>

Examen du modèle d'ampoule de E. Yoffe

Manuel Buisson¹ et Tanguy Rouxel¹

Reçu le 15 juillet 2015, accepté le 30 novembre 2015

Résumé – Nous portons toute notre attention sur le champ de plasticité non-orthodoxe (au sens de non-isovolume, Yoffe 1982, Philos. Mag. 40, 617-628) développé sous test d'indentation faible charge de verres et dessinant une zone affectée ayant la forme d'une ampoule^a. Établissant une première étape analytique pragmatique pour ce type de sollicitation, Yoffe (1982) nous a fourni un modèle de champ de contrainte décrit en terme de chargement élastique équivalent et qui vient se superposer au champ de Boussinesq issu de l'action d'une force d'indentation ponctuelle appliquée perpendiculaire à la surface indentée. Elle cite pour cela Love (1920, A Treatise On The Mathematical Theory of Elasticity, edited by C.U.P. 3ème ed.) et nous guide sur l'usage pertinent et couplé respectivement des modèles de centre de dilatation et de doublet de forces. Notre travail est notamment une suite de Buisson et al. (2008, Matériaux & Techniques 96, 11-17); Tamarasselvame et al. (2009, 12th Int. Conf. On Fracture, ICF12, Vol. 5, pp. 3377-3386) et surtout des récents résultats de Sellapan et al. (2013, Acta Materiala 61, 5949-5965) et Rouxel et al. (2014, C.R. Mécanique 342, 46-51); il peut aussi se situer en parallèle à Tamarasselvame & M. Buisson (2011, 20ème Congrès Français de Mécanique, s24., Vol. s42, pp. 3447-3452) et Tamarasselvame & Buisson (2014, en cours de soumission) par l'apport d'un gradient supplémentaire enrichissant la théorie de l'élasticité. L'étude approfondie proposée ici fournit des résultats nouveaux notamment pour décrire l'influence du coefficient de Poisson sur les phénomènes de densification et de cisaillement produits lors de l'indentation; l'illustration de ces travaux est assurée en utilisant les résultats expérimentaux fournis dans Sellapan et al. (2013, Acta Materiala 61, 5949-5965).

Mots clés : Densification / cisaillement / verre / centre de pression et doublet

Abstract – Investigation of E. Yoffe's Blister model. We focus our attention on the non-orthodox plasticity field (in the sense of non-isovolumic, Yoffe 1982, Philos. Mag. 40, 617-628) obtained during a low level of indentation testing on a glass and showing an affected zone shaped like a blister. Yoffe (1982) has given us a pragmatic and analytical approach for this loading where the stress is described like an equivalent elastic field which is superposed with the Boussinesq's field given basically by the study for a point load perpendicularly applied on the flat surface of a semi-infinite half-space. Quoting with relevance Love (1920, A Treatise On The Mathematical Theory of Elasticity, edited by C.U.P. 3ème ed.), Yoffe advises us in the coupled use of a symmetrical centre of pressure with a double force. Further to Buisson et al. (2008, Matériaux & Techniques 96, 11-17); Tamarasselvame et al. (2009, 12th Int. Conf. On Fracture, ICF12, Vol. 5, pp. 3377-3386) and especially the recent results of Sellapan et al. (2013, Acta Materiala 61, 5949-5965) and Rouxel et al. (2014, C.R. Mécanique 342, 46-51), our work takes a parallel action with Tamarasselvame & Buisson (2011, 20ème Congrès Français de Mécanique, s24., Vol. s42, pp. 3447-3452) and Tamarasselvame & Buisson (2014, submitted) in the sense that we contribute to an additional gradient-term enriching the theory of elasticity. Elaborately, we give new results dealing with the influence of Poisson's coefficient on densification phenomena and shearing during indentation; we use the experimental data of Sellapan et al. (2013, Acta Materiala 61, 5949-5965) to illustrate this work.

Key words: Densification / shear / glas / centre of pressure and double force

¹ Département de Mécanique & Verres, IPR UMR UR1-CNRS 6251, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France
manuel.buisson@univ-rennes1.fr

^a Traduction de *blister*.

1 Introduction

Dans ce travail, nous reprenons l'étude de Yoffe [1] sur la réponse de la surface d'un verre à une indentation en améliorant le plus possible ses calculs analytiques pour se doter de formules efficaces nous aidant à approfondir l'interprétation du comportement du verre.

Il s'agit de bien appréhender les deux mécanismes principaux de déformation [9, 10] :

- le cisaillement ;
- le phénomène de densification.

La combinaison de ces deux mécanismes est assimilée par Yoffe à une plasticité non orthodoxe au sens d'une plasticité non isovolume (alors qu'elle est classiquement considérée isovolume pour les métaux).

L'approfondissement analytique nous fournit des résultats intéressants, nouveaux et utiles même si nous savons que la physique à l'origine des transformations lors d'une indentation est complexe et que la prise en compte des phénomènes de frottements aux faces de l'indenteur demande des approches numériques de type éléments finis [11, 12].

Reprenant l'étude de Yoffe (voir aussi [3, 11] pour plus de détails) le test d'indentation est modélisé :

- par l'action d'une force ponctuelle appliquée perpendiculairement à la surface du verre (massif semi-infini) et dirigée vers l'intérieur de ce massif (les déplacements, déformations et contraintes générées sont les données bien connues du champ de Boussinesq) ;
- l'action combinée d'un centre de compression (ou de dilatation) et d'un doublet (selon la théorie de Love [2]) : il s'agit d'accommoder la forte concentration de contrainte liée au champ de Boussinesq par une densification localisée du matériau. Cela nous est permis par l'usage du modèle de centre de dilatation et on lui ajoute un champ de doublet calibré de telle sorte que cette combinaison ne génère pas de contrainte supplémentaire sur la surface du matériau (seule la force d'indentation est ponctuellement appliquée).

Dans la suite, nous rappelons les expressions des composantes du champ des contraintes de Boussinesq et, suivant les remarques de Yoffe [1], nous avons examiné l'ouvrage de Love [2] pour proposer les composantes des contraintes résultant de la superposition d'un centre de dilatation et d'un doublet.

2 Éléments théoriques

2.1 Champ adimensionnel des contraintes de Boussinesq

Le champ de Boussinesq est bien connu; nous préférons le présenter en joignant notre méthode d'adimensionnalisation qui sera exploitée dans la suite : P désigne la charge ponctuelle d'indentation (en Newton), \bar{r} est l'échelle de longueur (en mètre) et la contrainte de référence choisie pour l'adimensionnalisation est P/\bar{r}^2 .

Avec ces notations et en coordonnées sphériques r, ϕ, θ (pour précision : r est sans dimensions, il y a symétrie ϕ -révolution et $\theta = 0$ correspond à la droite d'action de la force P dirigée, selon les mêmes conditions que l'étude de Yoffe, vers le massif indenté et perpendiculairement à la surface de ce massif) les composantes non nulles du champ des contraintes (rendues sans dimensions) de Boussinesq s'écrivent (ν désigne le coefficient de Poisson) :

$$\sigma_{Brr}(r, \theta) = \frac{2(\nu - 2) \cos(\theta) - 2\nu + 1}{2\pi r^2} \quad (1)$$

$$\sigma_{B\theta\theta}(r, \theta) = -\frac{(2\nu - 1) \cos^2(\theta)}{2\pi r^2 (\cos(\theta) + 1)} \quad (2)$$

$$\sigma_{B\phi\phi}(r, \theta) = -\frac{(2\nu - 1)(2 \cos(\theta) + \cos(2\theta) - 1)}{4\pi r^2 (\cos(\theta) + 1)} \quad (3)$$

$$\sigma_{Br\theta}(r, \theta) = \frac{(1 - 2\nu) \sin(\theta) \cos(\theta)}{2\pi r^2 (\cos(\theta) + 1)}. \quad (4)$$

Ce champ est en $1/r^2$ et, comme Yoffe, nous considérons qu'il est purement élastique en ce sens que sa déformation associée disparaît dès la décharge de l'indentation ($P = 0$).

2.2 Champs des déplacements (dimensionnés) pour un doublet et un centre

Nous avons approfondi l'étude de Yoffe en nous reportant à la référence bibliographique qu'elle cite à propos de l'ouvrage de Love [2] et nous avons aussi noté que, dans son ouvrage, Love cite Dougall [13] pour une partie des formules qui nous concernent.

L'examen sur le texte nous amène à étudier tout d'abord attentivement les formules (dimensionnées) du travail de Love : nous en déduisons la construction d'un doublet et d'un centre de dilatation adaptée à notre problème d'indentation.

2.2.1 Doublet

Une force « \rightarrow » unité, dirigée selon l'axe Z et appliquée en plein milieu (point origine) d'un massif infini induit un déplacement élastique des particules. Love donne les composantes cartésiennes $\{U, V, W\}$ du déplacement de la particule de coordonnées $\{X, Y, Z\}$ (*seules les composantes $\{U, V, W\}$ sont en mètre/Newton car il s'agit d'un déplacement par unité de force appliquée*). Il considère ensuite une force unité de même droite d'action Z mais opposée « \leftarrow » qu'il vient à faire toucher pointe contre pointe à la précédente « $\rightarrow\leftarrow$ » : cet ensemble constitue ce qu'il appelle le doublet de force d'axe Z ne générant pas de moments (moment nul à l'origine et résultante nulle).

Love, par un raisonnement de passage à la limite (lorsque les pointes viennent se toucher), nous donne

alors la formule du déplacement induit par ce doublet (en cartésiennes) :

$$\vec{u}_{\text{doublet}} = D \cdot \left\{ \frac{\partial U}{\partial Z}, \frac{\partial V}{\partial Z}, \frac{\partial W}{\partial Z} \right\} \quad (5)$$

D est l'intensité, en Newton.mètre, de ce doublet et, par exemple, U est le X -déplacement par unité de force dans la Z -direction.

Nous utilisons ces formules et en nous plaçant en coordonnées sphériques, nous déduisons les composantes non nulles du déplacement généré par le doublet (l'axe Z correspond à ce qui sera l'axe d'indentation, μ est le coefficient de cisaillement) :

$$U_r^D = -\frac{D((4\nu - 5) \cos(2\theta) + 4\nu - 3)}{32\pi\mu(\nu - 1)R^2} \quad (6)$$

$$U_\theta^D = \frac{(2\nu - 1)D \sin(\theta) \cos(\theta)}{8\pi\mu(\nu - 1)R^2}. \quad (7)$$

2.2.2 Centre de dilatation/compression

Pour un centre² situé au point milieu du même massif infini, Love nous donne l'expression du vecteur déplacement \vec{U}_{centre} que subit le point dont le vecteur position en coordonnées cartésiennes est $\{X, Y, Z\}$:

$$\vec{U}_{\text{centre}} = \frac{C}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \frac{\partial R^{-1}}{\partial X}, \frac{\partial R^{-1}}{\partial Y}, \frac{\partial R^{-1}}{\partial Z} \right\} \quad (8)$$

avec $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, R est le rayon en coordonnées sphériques et C marque l'intensité du centre (en Newton.mètre), λ et μ sont les coefficients de Lamé (μ se rapportant au cisaillement).

Si nous travaillons en ne mentionnant que les coordonnées sphériques, le vecteur déplacement est noté $\vec{U}^C = \{U_r^C, U_\theta^C, U_\phi^C\}$ et par symétrie sphérique les composantes U_θ^C et U_ϕ^C sont nulles. La composante radiale s'écrit :

$$U_r^C = -\frac{(2\nu - 1)C}{8\pi\mu(\nu - 1)R^2}. \quad (9)$$

Love indique que nous avons un centre de compression pour $C > 0$: le déplacement correspond à une compaction isotrope.

Pour $C < 0$, nous avons donc un centre de dilatation : le déplacement est une expansion isotrope.

Par conséquent, pour le problème de densification qui nous concerne, nous adopterons le schéma de pensée d'Eshelby : *par commodité d'explication, nous rendons analogue le phénomène de densification à une forme de transformation de phase sans contrainte qui correspond à une contraction de volume. Cette contraction (elle accommode la pression de Boussinesq) générant un vide de*

² Love justifie ses calculs (8) en construisant le centre comme la superposition de 3 doublets 2 à 2 perpendiculaires, la Figure 1 en est l'illustration pour une dilatation.

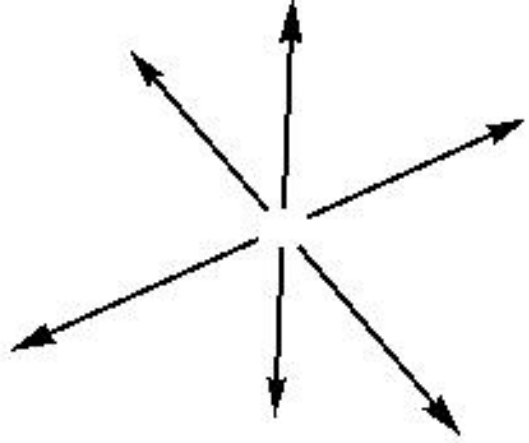


Fig. 1. Centre de dilatation.

Fig. 1. Center of dilatation.

matière autour d'elle, il est nécessaire de dilater cette nouvelle phase pour combler ce vide.

→ on obtiendra donc $C < 0$ et on observera une mise en traction hydrostatique assurant la dilatation de compatibilité à l'endroit de la densification.

2.3 Calibration du doublet et du centre de densification

2.3.1 Calibration par la condition de surface libre

Pour notre problème, on adaptera la construction du doublet comme suit : on se place toujours en plein milieu (point origine) d'un massif infini (de même matériau, bien sûr) et le rôle du doublet est, superposé avec le champ du centre de densification, d'assurer une condition de surface libre (celle correspondant au plan « $Z = 0$ »). Pour cela, on annulera la composante normale du vecteur contrainte correspondant à la face $Z = 0$ (on voit dans la suite que la composante tangentielle s'annule aussi).

Par conséquent, le doublet ainsi calibré en fonction de l'intensité du centre de dilatation, la surface « $Z = 0$ », devenue surface libre, peut être considérée comme la surface qui sera indentée et il nous suffira de superposer les champs issus du centre de densification, du doublet calibré et de Boussinesq pour recomposer la configuration de l'étude de Yoffe.

2.3.2 Calibration par comparaison des champs des déplacements (dimensionnés)

On superpose les composantes radiales des déplacements U_r^C et U_r^D et on compare à la proposition du champ d'ampoule (blister) de Yoffe en notant B son intensité. Pour rappel :

$$U_r^B = \frac{B(2(1 - \nu) - (5 - 4\nu) \cos^2(\theta))}{\mu R^2}. \quad (10)$$

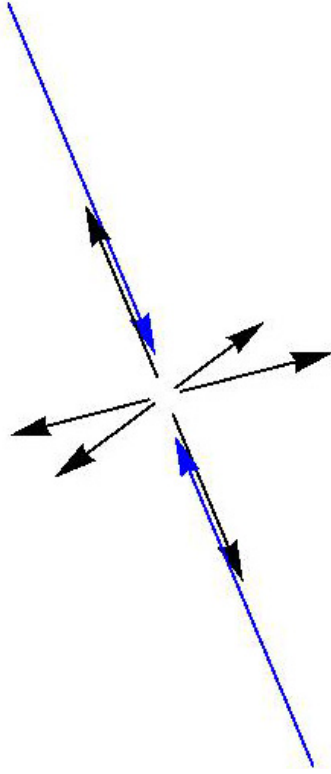


Fig. 2. Centre de dilatation + doublet.
Fig. 2. Center of dilatation + double force.

La comparaison $U_r^B \equiv U_r^C + U_r^D$, identifiée pour l'angle θ quelconque conduit aux conditions suivantes (l'identification des composantes respectives en U_θ ne contredit pas ces formules et n'ajoute rien) :

$$D = -16B\pi(-1 + \nu); \quad D = -2C \quad (11)$$

(D est positif, C négatif (phase densifiée en expansion de compatibilité) et on remarque que B dépend tout compte fait de ν via D ce qui est nouveau).

La conditions de cohérence $D = -2C$ ainsi obtenue se justifie également indépendamment de l'expression de Yoffé en utilisant la condition de surface libre ce que nous explicitons dans la suite.

On illustre la superposition du centre et du doublet par la Figure 2.

Pour la condition de surface libre, nous cherchons à présent les contraintes.

2.4 Calcul des contraintes et calibration du doublet

Il est facile de déduire la déformation associée à ce déplacement d'accommodation (déplacement qui est la superposition de ceux dûs respectivement au centre et au doublet) puis le champ élastique équivalent de contrainte via la loi de comportement élastique linéaire isotrope.

2.4.1 Contraintes dimensionnées

On obtient pour les composantes non nulles dimensionnées :

$$\sigma_{rr}^{CD} = \frac{C(8\nu - 4)}{8\pi(\nu - 1)R^3} + \frac{D((\nu - 5)\cos(2\theta) + 3(\nu - 1))}{8\pi(\nu - 1)R^3} \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{CD} = -\frac{C(2\nu - 1)}{4\pi(\nu - 1)R^3} - \frac{D(2\nu - 1)(\cos(2\theta) + 3)}{16\pi(\nu - 1)R^3} \quad (13)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{CD} = -\frac{C(2\nu - 1)}{4\pi(\nu - 1)R^3} - \frac{D(2\nu - 1)(3\cos(2\theta) + 1)}{16\pi(\nu - 1)R^3} \quad (14)$$

$$\sigma_{r\theta}^{CD} = -\frac{D(\nu + 1)\sin(2\theta)}{8\pi(\nu - 1)R^3}. \quad (15)$$

L'annulation de la composante normale (à la surface du verre, $\theta = \pi/2$) du vecteur contrainte s'obtient en annulant $\sigma_{\theta\theta}^{CD}$ avec $\theta = \pi/2$ et donne effectivement : $D = -2C$.

On a également vérifié que les champs de contrainte $\sigma^C(r, \phi, \theta)$, $\sigma^D(r, \phi, \theta)$ et $\sigma^{CD}(r, \phi, \theta)$ sont tous auto-équilibrés (au sens où ils vérifient les équations d'équilibre; nous nous plaçons par hypothèse en conditions quasi-statiques et négligeons les phénomènes d'inertie).

Dans la suite, nous utiliserons systématiquement le doublet calibré par $D = -2C$ et procédons à une réécriture sous forme non dimensionnée du champ des contraintes.

On notera avec l'exposant **A** ce champ pour signifier qu'il correspond au champ d'ampoule (superposition du centre de compression et du doublet calibré); il est en $1/r^3$ qui traduit que le champ d'ampoule est donc un champ qui est très localisé pour accommoder la sollicitation d'indentation qui, elle, est représentée par le champ de Boussinesq en $(1/r^2)$.

2.4.2 Contraintes non dimensionnées

En rappelant (Sect. 2.1) que \bar{r} est l'échelle de longueur avec r le rayon sans dimension et en choisissant P/\bar{r}^2 comme échelle de contrainte pour l'adimensionnalisation; on note primordialement :

$$D = -2C, \quad D = \kappa P\bar{r}$$

où κ est le paramètre sans dimension qui nous permettra ensuite de calibrer le champ d'ampoule (A) relativement au champ de Boussinesq : ce nombre sans dimension reflète la capacité du verre à se densifier pour accommoder la concentration de contrainte due à l'indentation. *Il sera estimé par des résultats expérimentaux obtenus sur différentes compositions verrières présentant différentes aptitudes à la densification [5].*

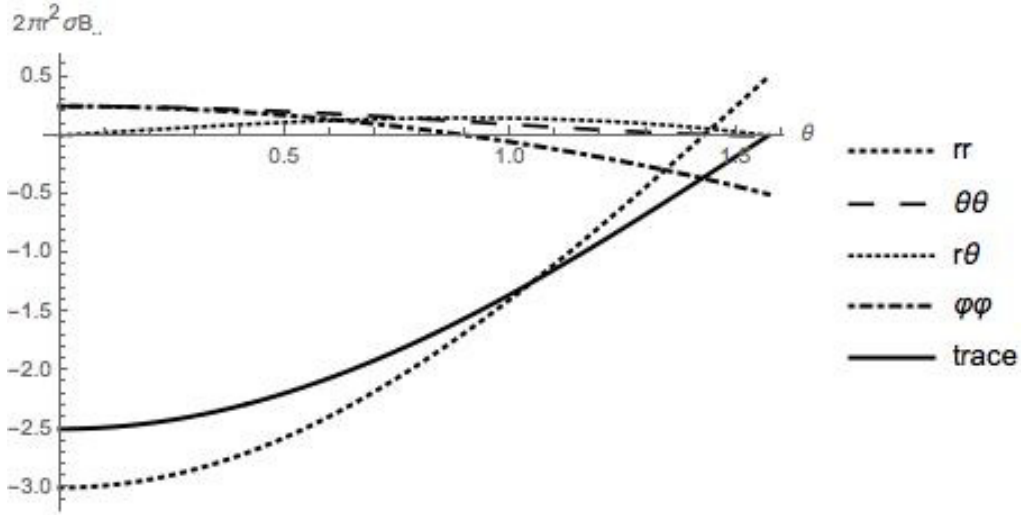


Fig. 3. Champ de Boussinesq ($\times 2\pi r^2$) pour $\nu = 0,25$.

Fig. 3. Boussinesq-field ($\times 2\pi r^2$) for $\nu = 0.25$.

On donne :

$$\sigma_{rr}^A = -\frac{\kappa((\nu - 5) \cos(2\theta) - \nu - 1)}{8\pi(1 - \nu)r^3} \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^A = -\frac{\kappa(2\nu - 1) \cos^2(\theta)}{8\pi(\nu - 1)r^3} \quad (17)$$

$$\sigma_{\phi\phi}^A = -\frac{\kappa(2\nu - 1)(3 \cos(2\theta) - 1)}{16\pi(\nu - 1)r^3} \quad (18)$$

$$\sigma_{r\theta}^A = -\frac{\kappa(\nu + 1) \sin(2\theta)}{8\pi(\nu - 1)r^3}. \quad (19)$$

La suite utilise ces résultats théoriques avec deux objectifs :

- proposer quelques dessins génériques afin d'éclairer les contributions de ces modèles ;
- confronter l'analyse du champ inspirée des travaux de Love et Yoffe aux résultats des expériences d'indentation sur les verres [5].

2.5 Aperçus génériques

2.5.1 Champ de Boussinesq

Nous constatons que la multiplication par $2\pi r^2$ des expressions des composantes adimensionnelles (1)–(4) du tenseur des contraintes de Boussinesq $\sigma_{B..}$ où $\{\dots\} = \{rr, r\theta, \theta\theta, \phi\phi\}$ donne des termes qui ne dépendent que de θ et ν . Il est facile alors de représenter la contribution du champ de Boussinesq en faisant varier θ et ν sur une animation. Pour illustration, nous posons $\nu = 0.25$ et faisons varier θ de 0 à $\pi/2$ dans la Figure 3. Nous y plaçons aussi la trace du tenseur des contraintes de Boussinesq

$$\text{Tr}(\sigma_B) = \sigma_{Brr} + \sigma_{B\theta\theta} + \sigma_{B\phi\phi} = -\frac{(\nu + 1) \cos(\theta)}{\pi r^2} \quad (20)$$

qui est un invariant important en ce qui concerne l'étude de la densification.

2.5.2 Discussion : un critère rudimentaire de rupture

Le champ de Boussinesq prédit qu'une fraction importante du domaine situé symétriquement autour de la droite d'action de l'indentation est soumis à une contrainte hydrostatique négative (compression) et ce quelque soit le coefficient de Poisson (cf. Eq. (20)). Cette partie sera sujette à la densification d'accommodation dès qu'un seuil physique de densification du verre sera franchi.

L'expression (1) suggère un critère rudimentaire de rupture en traction purement radiale indépendant de r et basé sur le constat que θ croissant de 0 à $\pi/2$, σ_{Brr} est d'abord en compression, s'annule pour un angle θ_ν bien précis et passe en traction au-delà.

La valeur de l'angle est immédiate :

$$\theta_\nu = \text{Arcos} \left(\frac{1 - 2\nu}{2(2 - \nu)} \right)$$

dont le graphique $\theta_\nu(\nu)$ représente une droite croissante très faiblement incurvée. Cela peut suggérer un angle critique de rupture $\theta_\nu(\nu)$ croissant avec ν mais il est difficile de le valider. En effet, il est important de noter qu'il n'est pas aisé de discuter les figures d'endommagement par microfissuration observées expérimentalement consécutivement à des expériences d'indentation sur le verre car le champ de contraintes est très sensiblement modifié à mesure que la fissuration progresse : de fait, il faut avoir recours à des méthodes numériques [14] reconstitutives (suivant l'évolution de la fissure) [15, 16].

À noter cependant l'approche de [17] relative à un comportement élastique-fragile parfait qui est à considérer comme une étude d'un mode de bifurcation allant de la solution de Boussinesq à une solution avec

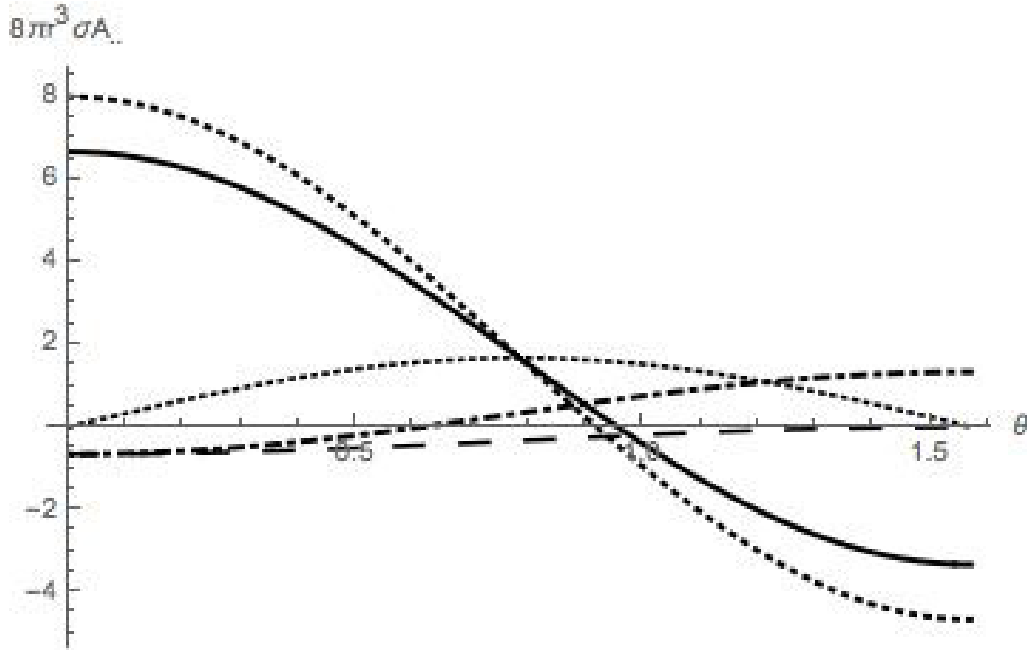


Fig. 4. Champ d'ampoule ($\times 8\pi r^3$) pour $\nu = 0,25$ et $\kappa = 1$.

Fig. 4. Blister-field ($\times 8\pi r^3$) for $\nu = 0.25$ and $\kappa = 1$. composantes: cf Figure 3.

amorce de décohésion; c'est une suite de [7] et une publication plus étoffée est en préparation.

La non-linéarité du comportement du matériau verre ne se prête donc pas au seul usage analytique du modèle de Boussinesq mais c'est un modèle simple dont l'usage systématique permet de :

- construire des critères classiques (cercles de Mohr, usage des 3 invariants du tenseur des contraintes...);
- pour en déduire une interprétation analytique explicite, tester leur efficacité et déduire éventuellement des formules utiles;
- par la pratique de ce type de calcul formel [18], pouvoir s'engager vers un enrichissement de la modélisation (modèle de Hertz, milieux dipolaires généralisant les notions de centres et de doublets,...).

Un début d'enrichissement analytique consiste dans ce qui suit à utiliser la superposition du centre et du doublet.

2.5.3 Champ d'ampoule : superposition centre et doublet

De même, nous constatons que la multiplication par $8\pi r^3$ des expressions des composantes adimensionnelles (16)–(19) du tenseur des contraintes du champ d'ampoule $\sigma_{A..}$ où $\{..\} = \{rr, r\theta, \theta\theta, \phi\phi\}$ donne des termes qui ne dépendent que de κ, θ et ν .

Pour illustration nous posons $\nu = 0.25, \kappa = 1$ et faisons varier θ de 0 à $\pi/2$ dans la Figure 4.

Nous y plaçons aussi la trace du tenseur des contraintes du champ d'ampoule :

$$\text{Tr}(\sigma_A) = -\frac{\kappa(\nu + 1)(3 \cos(2\theta) + 1)}{8\pi r^3(\nu - 1)}. \quad (21)$$

2.5.4 Présence d'une zone en état de traction

On vérifie bien via (17) et (19) que le champ d'ampoule laisse bien la surface indentée libre de contraintes.

La présence de traction (la composante radiale et la trace du tenseur contrainte sont positives, cf. Fig. 4) dans le domaine situé symétriquement autour de la droite d'action de l'indentation est évidente et la suite consistera à suivre la même démarche d'analyse que dans [5].

Le champ d'ampoule provoque bien des zones de traction localisées et l'analyse de la mise en concurrence de ces zones avec la compression de Boussinesq permet par exemple de pouvoir estimer si les fissures latérales se produisent à la charge ou à la décharge.

Il est cependant absolument nécessaire de connaître κ pour pouvoir poursuivre et la valeur $\kappa = 1$ a été donnée de façon arbitraire juste pour jauger l'allure des courbes. En effet, κ est lié à la capacité du matériau à se densifier : il est estimé dans la suite par l'étude [5] où on constate que cette capacité dépend fortement du coefficient de Poisson ν (il n'a pas été constaté dans [5] des cas singuliers tels $\kappa < 0$).

3 Confrontation expérimentale – densification

Dans ce paragraphe, nous utilisons les données expérimentales et les estimations issues de [5], notamment l'étude des propriétés densifiantes du verre.

Cela nous permet d'ajuster le paramètre κ et de définir des grandeurs significatives.

3.1 Dureté, longueurs et grandeurs de références

Dans [5], la dureté Vickers H_V est une donnée primordiale; elle définit la longueur de référence a_V telle que : $H_V = P/(2a_V^2)$.

On note alors R_C le rayon de contact d'un cylindre indenteur donnant la même dureté :

$$H_C = H_V = P/(\pi R_C^2).$$

Le rapport du module d'Young à la dureté Vickers est un paramètre significatif [19] dans l'étude expérimentale; on le note $\mathcal{R} : \mathcal{R} = E/H_V$.

Par ces considérations, nous pouvons préciser à présent la longueur de référence \bar{r} adoptée pour l'adimensionnalisation : nous choisissons de poser dans la suite $\bar{r} = a_V$.

3.2 Capacité à la densification

Selon Yoffe [1], l'avancement de la frontière de la zone densifiée est géré par le déplacement d'ampoule \vec{U}^A et, en coordonnées sphériques, le volume élémentaire engendré dV^A correspondant est donné par :

$$dV^A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi R^2 \sin(\theta) U_r^A(r, \theta, \varphi) d\theta \quad (22)$$

on obtient avec notre expression du champ d'ampoule ($D = -2C$) :

$$dV^A = \frac{(2\nu - 1)D}{24\mu(\nu - 1)} \quad (23)$$

et ce volume est explicité expérimentalement dans [5] selon :

$$dV^A = V_i^- \cdot (-V_p(\nu) - V_r(\nu) + 1) \quad (24)$$

avec :

$$\begin{aligned} V_i^- &= \frac{2(a_V)^3}{3 \tan(\psi)}; \\ V_p(\nu) &= \frac{1}{\alpha_p + \beta_p \exp(\chi_p \cdot \nu)}; \\ V_r(\nu) &= \frac{1}{\alpha_R + \beta_R \exp(\chi_R \cdot \nu)} + \delta_R. \end{aligned} \quad (25)$$

Nous avons ainsi le moyen de calibrer κ (rappel : $D = \kappa P \bar{r}$) selon la capacité du verre à se densifier sous l'action de la charge P .

On déduit :

$$\kappa = C \frac{24 dV^A \mu(\nu - 1)}{a_V (2\nu - 1) P} \quad (26)$$

où C est le coefficient correcteur tenant compte du retour élastique de l'empreinte observé lors de la décharge. Ne pas tenir compte de ce retour élastique reviendrait à surestimer le volume réellement affecté par la densification. Les mesures des empreintes résiduelles mènent à une première estimation $C \simeq 0,7$.

On utilise également les définitions et valeurs des coefficients α_p , β_p , χ_p , α_R , β_R , χ_R , δ_R , ψ issues de l'étude de la campagne d'expériences de [5].

3.3 Lobe de densification

Si nous rappelons que Love nous permet d'accéder aux équivalents élastiques des champs de déformations et de contraintes, une grandeur clé pour étudier la densification cumulée (par hypothèse isotrope) est la trace du tenseur de contrainte en superposant les champs de Boussinesq et d'ampoule.

Pour $\nu = 0,17$, nous représentons les lignes de niveaux de cette trace. Pour les niveaux positifs, nous sommes en traction et pour les négatifs nous sommes en compression.

Dans la zone en traction, (la force P de Boussinesq est représentée par la flèche sur le coin inférieur gauche de la Figure 5 et appui horizontalement de la gauche vers la droite, l'axe horizontal de cette figure étant axe de symétrie).

Les lignes de niveaux positifs dessinent des lobes où le niveau de densification augmente en se rapprochant du point d'application de la force. La convergence étant en $1/r^3$ nous tendons très rapidement vers l'infini en se rapprochant du point d'application de la force. Pratiquement, nous dessinons un (demi)-disque rouge pour situer le noyau de densification au delà du niveau de volume +1000 (non-dimensionné).

La ligne du niveau zéro se referme pour définir ce que nous nommons le lobe de densification en tant que volume affecté par la densification qui génère une mise en traction du matériau pour rendre compatible le champ des déplacements et ce tant qu'aucune fissure n'est amorcée. Ce volume ne donne qu'une information géométrique, il n'est pas, à ce stade, tenu compte de la répartition de la masse volumique du matériau subissant le phénomène de densification.

Dans le plan de cette Figure 5, nous proposons l'équation du grand lobe suivant (adimensionné) :

$$y = \sqrt{2} \sqrt{-\frac{x^2(\kappa + 2(\nu - 1)x)}{4(\nu - 1)x - \kappa}} \quad (27)$$

où x est l'abscisse selon la droite horizontale (qui est axe de symétrie) et y l'ordonnée sur l'axe vertical sur la Figure 5.

Nous proposons également l'expression analytique du volume (adimensionné) de ce lobe, à savoir :

$$v_{\text{lobe}} = -\frac{\pi \kappa^3 (9 \log(3) - 8)}{192(\nu - 1)^3} \quad (28)$$

l'abscisse où la ligne de niveau 0 coupant l'axe de symétrie étant

$$x_{\text{lobe}} = -\frac{\kappa}{2(\nu - 1)} \quad (29)$$

et avec les données [5] : $\mathcal{R} = 11,6$, $\tan(\psi) = \tan(70.3 \times \pi/180)$, $\alpha_R = 1,04$, $\beta_R = 0,0008$, $\chi_R = 30$, $\delta_r = 0,02$, $\alpha_p = 1,02$, $\beta_p = 230$, $\chi_p = -18$, on trace le volume du lobe en fonction du coefficient de Poisson, Figure 6.

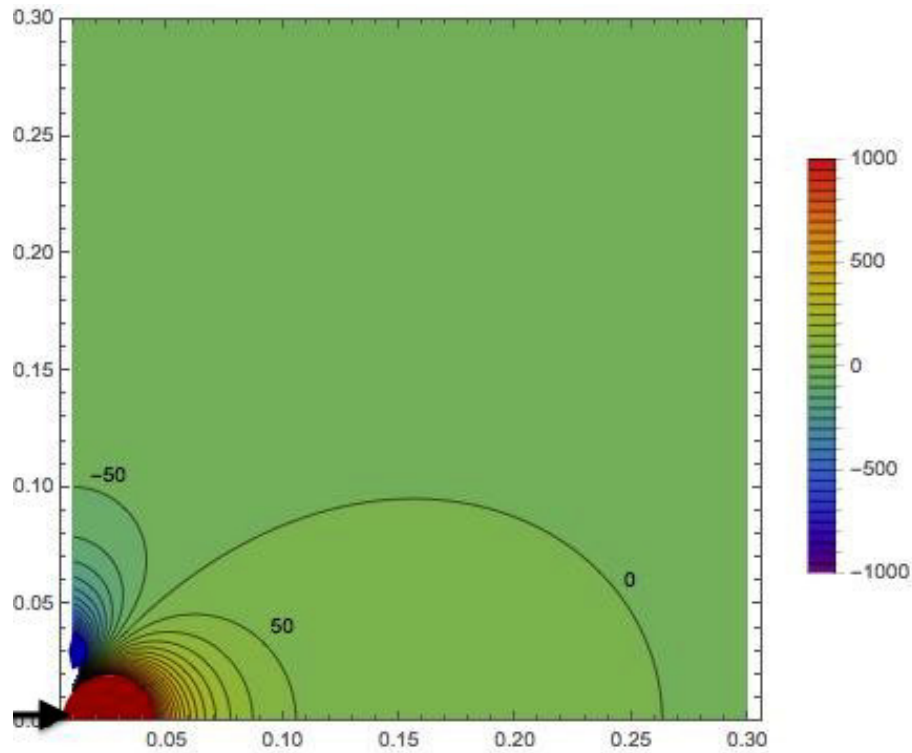


Fig. 5. Lobe de densification (ligne 0), $\nu = 0,17$, adimensionnel.

Fig. 5. Lobe of densification (level line 0), $\nu = 0,17$, dimensionless.

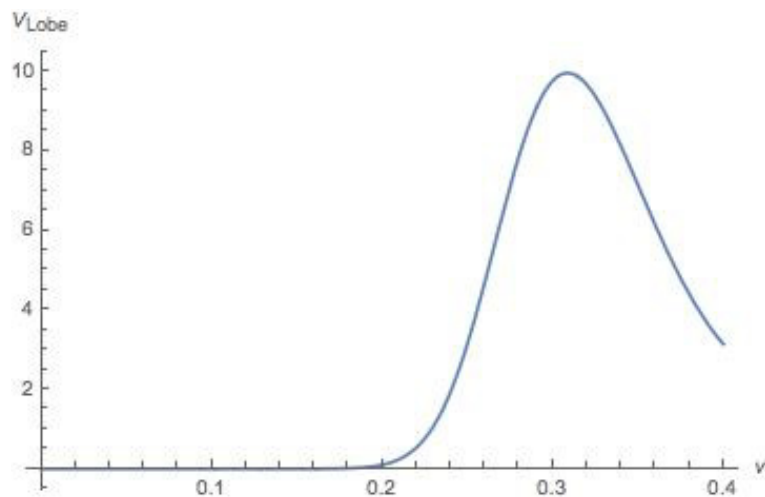


Fig. 6. Volume densifié en fonction de ν , adimensionné.

Fig. 6. Densified volume according to ν , dimensionless.

3.4 Fissures latérales

L'occurrence de fissures latérales peut se produire lorsque la composante radiale de la contrainte s'annule ou atteint un certain seuil positif le long de la droite d'action de l'indentation ($\theta = 0$).

On a vérifié que les courbes de niveaux positifs ou négatifs des contraintes radiales s'organisent également sous formes de lobes dont la répartition est sensiblement

équivalente à celle des lobes pour les niveaux de contraintes hydrostatiques positives ou négatives (Fig. 5).

L'envergure de ces lobes est prévisible en se basant sur la Figure 6 et on peut le constater en comparant les lobes de la Figure 5 (densification pour $\nu = 0,17$) avec ceux de la Figure 7 (niveaux de la contrainte radiale pour $\nu = 0,23$).

Pour prévoir si une fissure latérale se produira à la charge ou à la décharge, il faut comparer les niveaux de contraintes de $\sigma_{ABrr} = \sigma_{Brr} + \sigma_{Arr}$ avec ceux de σ_{Arr} ,

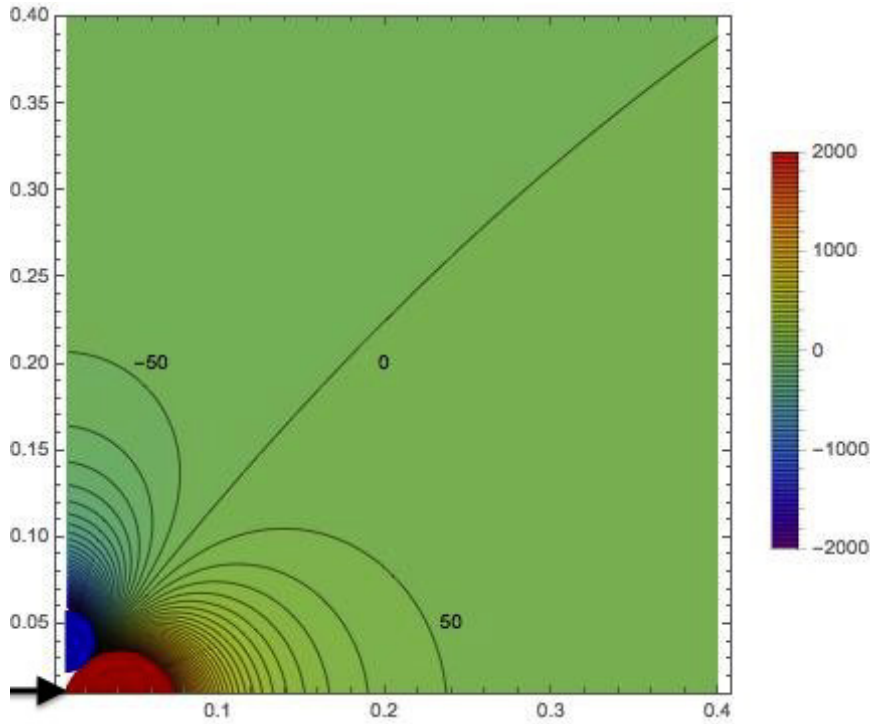


Fig. 7. Niveaux de $\sigma_{Brr} + \sigma_{Arr}$, $\nu = 0,23$, adimensionné.

Fig. 7. Levels for $\sigma_{Brr} + \sigma_{Arr}$, $\nu = 0.23$, dimensionless.

ce dernier terme correspondant à la contrainte résiduelle restant de l’ampoule lorsque la sollicitation de Boussinesq disparaît.

Nous avons choisi de dessiner les contraintes (adimensionnées) $\sigma_{ABrr}(r, \theta)$ et $\sigma_{Arr}(r, \theta)$ pour θ variant de 0 à $\pi/2$ et $r = 1$; le choix de 4 coefficients de Poisson se base sur la Figure 6 de façon à bien différencier les niveaux de contraintes atteints en $r = 1$ respectivement pour $\nu = 0,17$, $\nu = 0,3$, $\nu = 0,24$ et $\nu = 0,43$ (ces 2 derniers choix ayant un même volume v_{lobe}).

A la lecture de la Figure 8, il apparaît que c’est le verre de coefficient de Poisson $\nu = 0,17$ qui serait, parmi les 3 autres, le plus susceptible de présenter des fissures latérales lors de la décharge puisque $\sigma_{Arr}(1, 0) > 0$ tandis que $\sigma_{ABrr}(1, 0) < 0$ (c’est observé également dans [5] pour $\nu = 0,15$).

4 Conclusion

En nous inspirant de l’étude de Yoffe, nous avons étudié la modélisation de Love relativement à la notion de centre de dilatation et de doublet.

Cela nous a permis d’obtenir une extension du modèle d’ampoule de Yoffe car nous avons pu mettre en évidence la contribution de chaque terme (centre et doublet) et la façon avec laquelle ils se combinent pour respecter la condition de surface libre intrinsèque au champ d’ampoule auto-équilibré.

De là, nous avons proposé une autre expression du coefficient d’intensité du champ d’ampoule différente de celle de Yoffe.

C’est donc un nouveau modèle que nous proposons et nous avons commencé une confrontation avec l’étude [5]; une comparaison systématique est entreprise actuellement.

Cela ouvre quelques perspectives de variantes de calculs et d’enrichissement de l’analyse si on décide par exemple de positionner le centre de dilatation légèrement au dessous de la surface...ce qui nous fera tendre également vers les modèles de milieux micro-polaires.

Même si nous savons que le comportement des verres est physiquement et chimiquement complexe et lui confère un caractère non-linéaire faisant appel à des approches numériques performantes, nous avons obtenu des résultats analytiques nouveaux notamment en ce qui concerne le volume et la géométrie du lobe affecté par la densification. Pour une expérience, une modélisation et une simulation, les paramètres clés et les variables d’état du phénomène étudié sont inventoriés de la manière la plus détaillée possible : l’objectif du calcul formel [18] est de proposer une “signature” analytique de ces paramètres et variables et discerner les contributions propres de chacun parmi l’ensemble des couplages complexes qui les relient.

Nous avons abordé l’étude des configurations d’endommagement en commençant par les fissures latérales via l’examen des contraintes radiales : nous retrouvons les remarques de l’étude [5] (également en cisaillement, non mentionné ici).

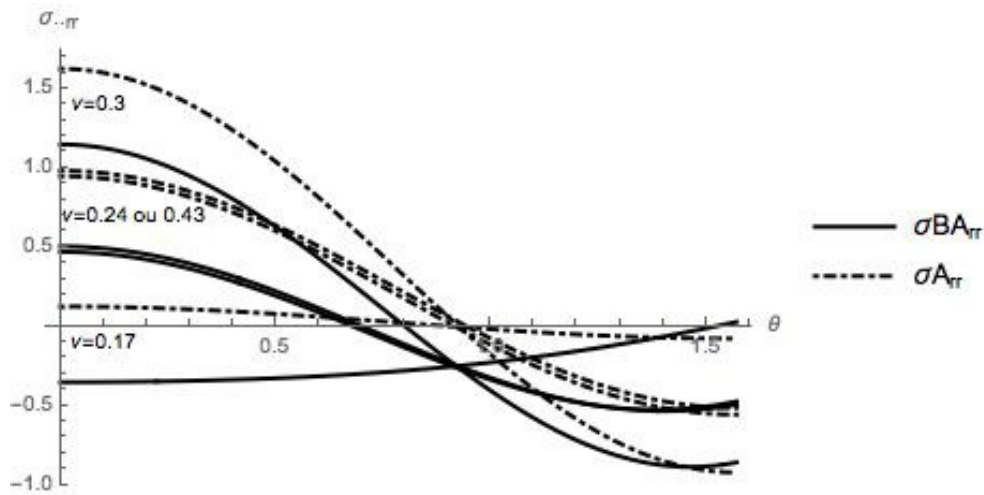


Fig. 8. Différencier les niveaux de σ_{BArr} et σ_{Arr} pour $\nu = \{0,17, 0,3, 0,24, 0,43\}$, adimensionné.
Fig. 8. Differentiate the levels of σ_{BArr} and σ_{Arr} for $\nu = \{0,17, 0,3, 0,24, 0,43\}$, dimensionless.

Il reste à caler maintenant avec précision les paramètres clés (ratio \mathcal{R} , coefficient de retour élastique \mathcal{C} , géométrie de l'indenteur : angle ψ et a_V qui est la longueur de référence explicitement choisie) et, plus généralement de construire des critères analytiques de densification basés sur l'utilisation d'invariants.

Remerciements. Cette étude bénéficie du soutien du Conseil Européen de la Recherche au travers du contrat ERC : Advanced Grant 320506 (DAMREG).

Références

- [1] E. Yoffe, *Philos. Mag.* **40** (1982) 617-628
- [2] A. Love, *A Treatise On The Mathematical Theory of Elasticity*, edited by C.U.P. 3ème ed., 1920
- [3] M. Buisson, J.C. Sangleboeuf, N.A. Tamarasselvame, *Matériaux & Techniques* **96** (2008) 11-17
- [4] N.A. Tamarasselvame, M. Buisson, J.C. Sangleboeuf, 12th Int. Conf. On Fracture, ICF12, 2009, Vol. 5, pp. 3377-3386
- [5] P. Sellapan, T. Rouxel, F. Célarié, E. Becker, P. Houizot, R. Conradt, *Acta Materiala* **61** (2013) 5949-5965
- [6] T. Rouxel, P. Sellapan, F. Célarié, P. Houizot, J.C. Sangleboeuf, *C.R. Mécanique* **342** (2014) 46-51
- [7] N.A. Tamarasselvame, M. Buisson, 20ème Congrès Français de Mécanique, s24., 2011, Vol. s42, pp. 3447-3452
- [8] N.A. Tamarasselvame, M. Buisson, en cours de soumission, 2014
- [9] S. Yoshida, J.C. Sangleboeuf, T. Rouxel, *J. Mater. Res.* **20** (2005) 3404-3412
- [10] J. Hui, V. Keryvin, T. Rouxel, T. Hammouda, *Scripta Mater.* **55** (2006) 1159-1162
- [11] G. Feng, S. Qu, Y. Huang, W. Nix, *Acta Materiala* **55** (2007) 2929-2938
- [12] V. Keryvin, *Acta Materiala* **55** (2007) 2565-2578
- [13] J. Dougall, *Edinburgh Math. Soc. Proc.* **16** (1898) 82-98
- [14] B. Lawn, T. Wilshaw, N. Hartley, *Int. J. Fracture* **10** (1974) 1-16
- [15] D. Tumbajoy-Spinel, E. Feulvarh, J.M. Bergheau, G. Kermouche, *C.R. Mécanique* **341** (2013) 715-725
- [16] M. Jebahi, D. André, F. Dau, J.L. Charles, I. Iordanoff, *J. Non-Crys. Solids* **378** (2013) 15-24
- [17] M. Buisson, N.A. Tamarasselvame, 14th European Mech. of Mat. Conf.- EMMC-14 S5-2c, 2014
- [18] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, edited by W. Media and C. University, Cambridge, 2003
- [19] B. Lawn, V. Howes, *J. Mater. Sci.* **16** (1981) 2745-2752